Übungen zur Mechanik 4

Trägheits- und Aktionsprinzip

Formelübersicht

Gleichförmige Bewegung (gfB)

$$s = v \cdot t$$

t = Dauer des Vorganges
s = in der Zeit t zurückgelegte Strecke
v = Geschwindigkeit = konstant!

Gleichmässig beschleunigte Bewegung ohne Anfangsgeschwindigkeit (gmbBoA)

$$s = \frac{a}{2} \cdot t^2$$
$$v = a \cdot t$$
$$s = \frac{v^2}{2a}$$
$$s = \frac{v \cdot t}{2}$$

t = Dauer des Vorganges
s = in der Zeit t zurückgelegte Strecke
a = Beschleunigung = konstant!
v = Endgeschwindigkeit

Die resultierende Kraft

Unter der **resultierenden Kraft $\boldsymbol{F_{\mathrm{res}}}$** versteht man die Zusammenfassung aller auf einen Körper wirkenden Kräfte zu einer einzigen Kraft. Die Zusammenfassung erfolgt via **Vektoraddition** (= Aneinanderhängen aller Kraftpfeile).

Das Erste Newton'sche Axiom (Trägheitsprinzip)

Ein Körper ist genau dann im Kräftegleichgewicht ($F_{\mathrm{res}} = 0$), wenn seine Bewegung geradlinig und gleichförmig ist ($v = \mathrm{konst.}$). Dazu gehört auch die Ruhesituation ($v = 0$).

Das Zweite Newton'sche Axiom (Aktionsprinzip)

Die resultierende Kraft F_{res} zeigt stets in die Richtung der Beschleunigung a und es gilt:

$$F_{\mathrm{res}} = m \cdot a$$

F_{res} = Resultierende Kraft
m = (träge) Masse des Körpers
a = Beschleunigung

Gewichtskraft

$$F_{\mathrm{G}} = m \cdot g$$

F_{G} = Gewichtskraft, welche ein Körper erfährt
m = (schwere) Masse des Körpers
g = Ortsfaktor

Zerlegung der Gewichtskraft auf der schiefen Ebene

$$F_{\mathrm{G},\parallel} = F_{\mathrm{G}} \cdot \sin\alpha$$
$$F_{\mathrm{G},\perp} = F_{\mathrm{G}} \cdot \cos\alpha$$

$F_{\mathrm{G},\parallel}$ = Parallel-Komponente der Gewichtskraft = Hangabtriebskraft
$F_{\mathrm{G},\perp}$ = Senkrecht-Komponente der Gewichtskraft
α = Steigungswinkel mit $\tan\alpha = m$
m = Steigung der schiefen Ebene

Reibungskräfte

Gleit-/Rollreibung:	$F_{\mathrm{R}} = \mu_{\mathrm{G/R}} \cdot F_{\mathrm{N}}$	F_{R} = Reibungskraft
Haftreibung:	$F_{\mathrm{R}} \leq \mu_{\mathrm{H}} \cdot F_{\mathrm{N}}$	μ = Reibungszahl
		F_{N} = Normalkraft

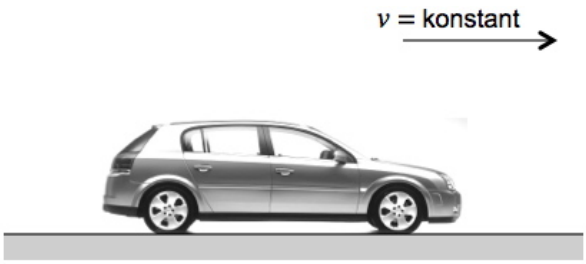
Aufgaben mit Reibungskräften (ohne kinematische Berechnungen)

1. *Rollreibung beim Auto*

   Wir betrachten ein Auto mit einer Masse von $1350\,\mathrm{kg}$.

   (a) Das Auto fährt **gleichförmig** auf einer **horizontalen** Strasse.

   i. Wie lauten die Kraftgleichungen für das Auto in dieser Situation?
   ⇒ **Kraftpfeile** in die Skizze eintragen und **Gleichungen** ablesen (inkl. **Luftwiderstand**!).



   ii. Bei einer Geschwindigkeit von $v = 48\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ betrage der Luftwiderstand $F_\mathrm{L} = 180\,\mathrm{N}$. Die **Rollreibungszahl** sei bei den derzeitigen Strassenverhältnissen $\mu_\mathrm{R} = 0.011$.
   Wie gross muss demzufolge die in Fahrtrichtung wirkende **Motorenkraft** des Autos sein?

   (b) Nun möchte die Lenker*in **beschleunigen**. Sie tritt stärker auf das Gaspedal, sodass das Auto eine **Beschleunigung** von $1.3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ erfährt.

   i. Wie lauten die neuen Kraftgleichungen für das Auto?
   ⇒ Pfeile eintragen und Gleichungen ablesen inkl. **Gleichung für $\boldsymbol{F_\mathrm{res}}$**!



   ii. Luftwiderstand und Rollreibungszahl seien immer noch gleich wie unter (a).
   Welche Motorenkraft muss das Auto jetzt auf die Strasse bringen?

2. *Gleitreibung beim Curlingspiel*

   Ein Curlingstein erfahre, nachdem er abgestossen wurde, eine **Verzögerung** von $-0.056\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

   (a) Welche Kräfte wirken während dem langen Abbremsvorgang auf den Stein und wie lauten die Kraftgleichungen? (F_L vernachlässigen!)

   (b) Welche Gleitreibungszahl herrscht zwischen dem Stein und der Eisoberfläche?
   Tipp: Wenn du zuerst rein formal rechnest, also die Zahlenwerte erst am Schluss einsetzt, wirst du sehen, dass ich die Masse des Steins nicht anzugeben brauche!

   (c) Curlingspieler*innen wischen manchmal mit einem Besen intensiv das Eis, über das der Stein gleich rutschen wird. Dadurch soll der Stein etwas weiter rutschen.
   Was soll durch das Wischen physikalisch erreicht werden? Erkläre unter Verwendung der passenden physikalischen Begriffe!

3. *Haftreibung – Beispiele zum Kennenlernen*

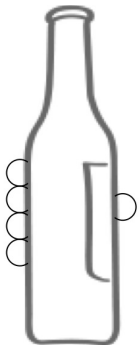
Zwischen aneinander liegenden Oberflächen tritt Reibung auf. Solange sich die Oberflächen noch nicht relativ zueinander bewegen, sondern die Reibung erst mithilft, diese **Bewegung zu verhindern**, spricht man von **Haftreibung**. Sobald sich die Oberflächen relativ zueinander bewegen und ganz im alltäglichen Sinn des Wortes **aneinander reiben**, nennen wir dies **Gleitreibung**.

Haftreibung verhindert also Bewegung, bevor sie entsteht. Das hört sich im ersten Moment vielleicht wie ein "lästiges" Phänomen an, sie ist in dieser Funktion aber für unser tägliches Leben von ungeheurer Wichtigkeit, wie zwei Beispiele zeigen:

(a) **Gegenstände halten**

Angenommen, ich habe eine $7.5\,\mathrm{dl}$ Glasflasche mit einer Masse von $1.1\,\mathrm{kg}$ angehoben und halte sie nun senkrecht in einer Hand.





i. Weshalb rutscht mir die Flasche nicht aus der Hand?

Trage in die Skizze rechts fünf Kräfte ein: 1 x F_G, 2 x F_D (Druckkraft der Finger von zwei Seiten her $=$ für die Reibung verantwortliche Normalkräfte) und 2 x F_R (Haftreibung auf beiden Seiten der Flasche).

Lies aus der Skizze die Kraftgleichungen für die Flasche ab.

ii. Die Haftreibungszahl zwischen meinen Fingern und dem Flaschenglas betrage $\mu_\mathrm{H} = 0.55$. Mit welcher Kraft F_D müssen meine Finger mindestens gegen die Flasche drücken, damit sie mir nicht aus der Hand rutscht?

Hinweis: Gehe davon aus, dass die beiden Fingerkräfte F_D gleich gross sind.

(b) **Gehen/Starten/Abbremsen**

Aus dem Stand möchte ich losgehen, vielleicht sogar losrennen. Dazu "stosse ich mich vom Boden in Gehrichtung ab".

i. Weshalb funktioniert dieses Abstossen in Vorwärtsrichtung? (Zeichne meine Kräfteskizze mit den entscheidenden drei auf mich wirkenden Kräften!)

Was ist das für eine Kraft, dank der ich mich also nach vorne zubewegen beginnen kann?

ii. Angenommen, ich renne mit einer Beschleunigung von $2.9\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ los. Wie gross muss dazu die Haftreibung zwischen meinen Füssen und dem Boden sein, wenn ich $86\,\mathrm{kg}$ wiege?

iii. Wie gross muss für die unter ii. genannte Beschleunigung die Haftreibungszahl zwischen meinen Füssen und dem Boden mindestens sein?

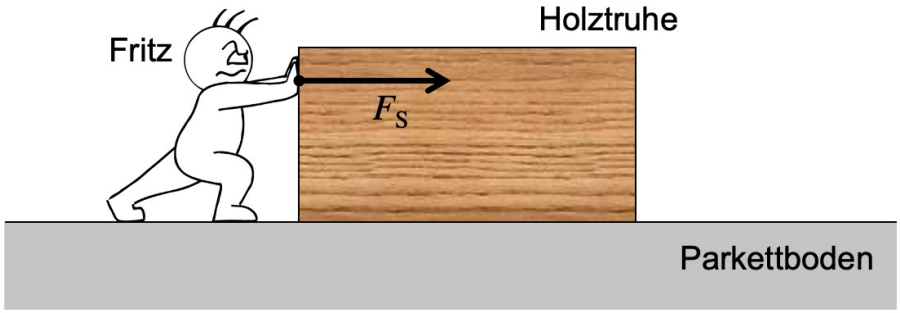
iv. Weshalb montieren sich Leichtathletiksprinterinnen Schuhe mit Spikes und weshalb wird auf Tartanbahnen gerannt? Welche physikalische Grösse wird hierdurch "verbessert"?

v. Auch Autos stossen sich beim Beschleunigen in Vorwärtsrichtung vom Boden ab. Zwischen Pneus und Asphalt herrscht im trockenen Zustand z.B. eine Haftreibungszahl von 0.66. Welche Beschleunigung ist damit (bei vernachlässigbarem Luftwiderstand) maximal möglich, ohne dass die Räder durchdrehen?

4. *Fritz und die Truhe*

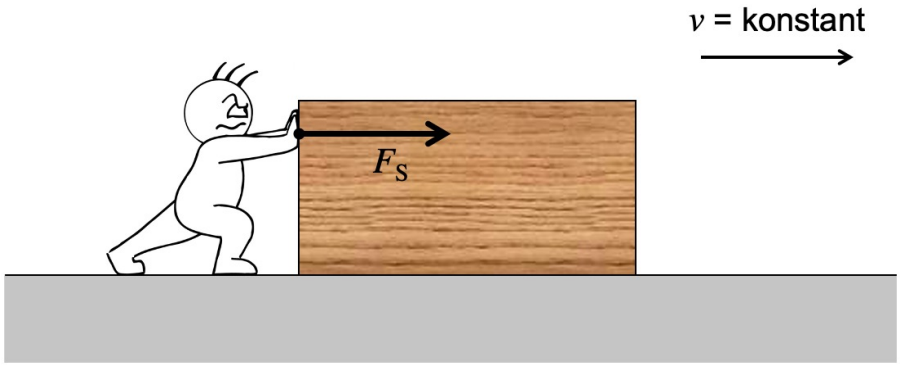
Fritz hat zuhause eine alte, "kleine" Holztruhe. Beim Umstellen seines Zimmers möchte er sie verschieben. Gefüllt besitzt die Truhe eine Masse von $58\,\mathrm{kg}$.

(a) Damit sich die Truhe in Bewegung setzt, muss Fritz mit $210\,\mathrm{N}$ Schubkraft gegen sie drücken:



Wie gross ist demzufolge die Haftreibungszahl μ_H zwischen Truhe und Parkettboden?

(b) Die Gleitreibungszahl zwischen Truhe und Parkettboden betrage $\mu_\mathrm{G} = 0.32$.
Mit welcher Kraft F_S muss Fritz die Truhe schieben, um die Geschwindigkeit konstant zu halten?



(c) Was könnte Fritz tun, um das Schieben der Truhe zu vereinfachen, d.h., um die unter (b) berechnete Schubkraft zu verringern? Nimm zu den folgenden Vorschlägen Stellung:

- Die Truhe mit einer geringeren Geschwindigkeit schieben.
- Die Truhe vor dem Verschieben leeren.
- Die Truhe auf die kleinere Frontseite aufstellen und so schieben.
- Papier auf den Parkettboden legen und die Truhe darauf verschieben.

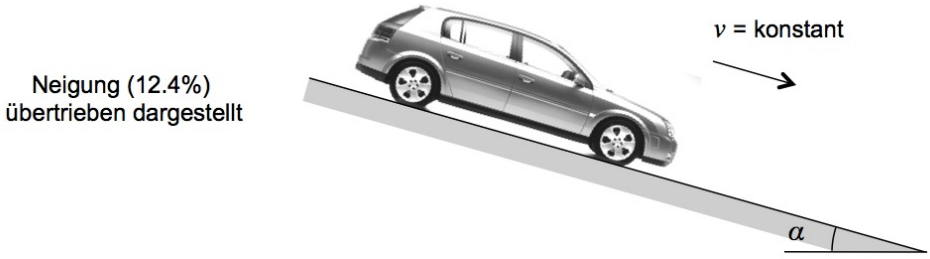
Tipp: Konsultiere zur Beurteilung dieser Vorschläge die Anmerkungen zur Reibung im Abschnitt 3.4 auf den Seiten 20 und 21 im Mechanik-Skript.

Kräfte auf der schiefen Ebene (ohne kinematische Berechnungen)

5. *Gratisfahrt*

   Ein Auto ($m = 1570\,\mathrm{kg}$) fährt eine recht stark geneigte Strasse hinunter (Steigung $= 12.4\,\%$). Dabei bleibt die Geschwindigkeit gleich, weil die Fahrerin das Bremspedal betätigt. Die daraus hervorgehende Bremskraft beträgt $F_\mathrm{B} = 1100\,\mathrm{N}$.

   (a) Zeichne die Kräfteskizze des Autos (inkl. der Rollreibung F_R und Bremskraft F_B, der Luftwiderstand F_L sei hingegen vernachlässigbar).



   (b) Stelle aufgrund der Kräfteskizze die Kraftgleichungen auf und berechne, wie gross die Rollreibungszahl zwischen Pneus und Strasse ist.

6. *Rutschpartie*

   Zwischen vorgegebenen Oberflächen ist die Haftreibungszahl μ_H stets etwas grösser als die Gleitreibungszahl μ_G. Dies führt dazu, dass ein Holzklotz auf einem Brett, dessen Neigung man kontinuierlich erhöht, irgendwann zu rutschen beginnt, aber nicht sofort wieder stoppt, auch wenn man mit der Neigung unter den Wert geht, bei dem der Klotz zu Rutschen anfing.

   Ein Beispiel: Ein Holzklotz mit einer Masse von $785\,\mathrm{g}$ beginne auf einer Unterlage aus lackiertem Holz bei einer Neigung von gerade $33.0\,\%$ zu rutschen. Erst wenn man die Neigung unter $26.5\,\%$ verringert, bremst der Klotz wieder ab.

   (a) Bis zu welchem Grenzwert konnte die Haftreibungskraft den Klotz in Ruhe halten?

   (b) Wie gross ist demzufolge die Haftreibungszahl zwischen dem Holzklotz und der Oberfläche?

   (c) Welche Gleitreibungszahl herrscht zwischen dem Holzklotz und der Oberfläche?
   Tipp: Sobald der Klotz tatsächlich abbremst, ist die Gleitreibung grösser als die Parallelkomponente der Gewichtskraft.

7. *Skitour-Physik*

   (a) In einer Skitour geht's mit den Fellen an den Ski streng aufwärts (Bild). Gib über die Kräftesituation des Skitourenläufers Auskunft.

   $\Rightarrow$ Kräfte ins Bild eintragen und Kraftgleichungen aufstellen.

   (b) Zwischen Skis (resp. Fellen) und Schnee liege eine Haftreibungszahl von 0.65 vor.

   Welche Hangneigung lässt sich damit maximal erklimmen?

   Fasse präzise zusammen, weshalb der Halt mit steilerem Hang schwieriger wird.



Vermischte Aufgaben mit kinematischen Berechnungen

8. *Wie gross ist* $1\,\mathrm{N}$*?*

   Ein Newton ist gerade etwa gleich dem Betrag der Gewichtskraft, welche eine Masse von $100\,\mathrm{g}$ an der Erdoberfläche erfährt.

   Dies war unsere bisherige "Definition" der SI-Einheit **Newton**. Mit dem **Aktionsprinzip** $F_{\mathrm{res}} = m \cdot a$ verstehen wir nun auch ihre **offizielle Definition**:

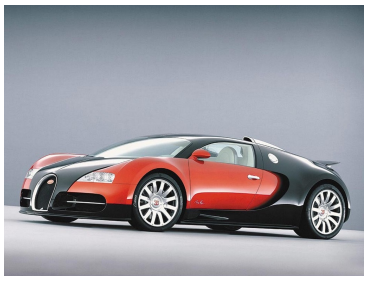
   Ein Newton ist der Betrag der konstanten resultierenden Kraft, welche eine Masse von $1\,\mathrm{kg}$ in genau einer Sekunde aus dem Stand auf eine Geschwindigkeit von genau $1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ beschleunigt.

   Beantworte mit dieser Definition die folgenden Fragen, möglichst ohne an Formeln zu denken:

   (a) Ein Sprinter besitze eine Masse von $100\,\mathrm{kg}$. In zwei Sekunden schafft er es auf $11\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ zu beschleunigen. Mit welcher (resultierenden) Kraft muss er dazu beschleunigen?

   (b) Die auf ein Auto wirkende resultierende Kraft betrage $3000\,\mathrm{N}$. Dadurch beschleunigt es in 10 Sekunden von 0 auf $30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Welche Masse besitzt es?

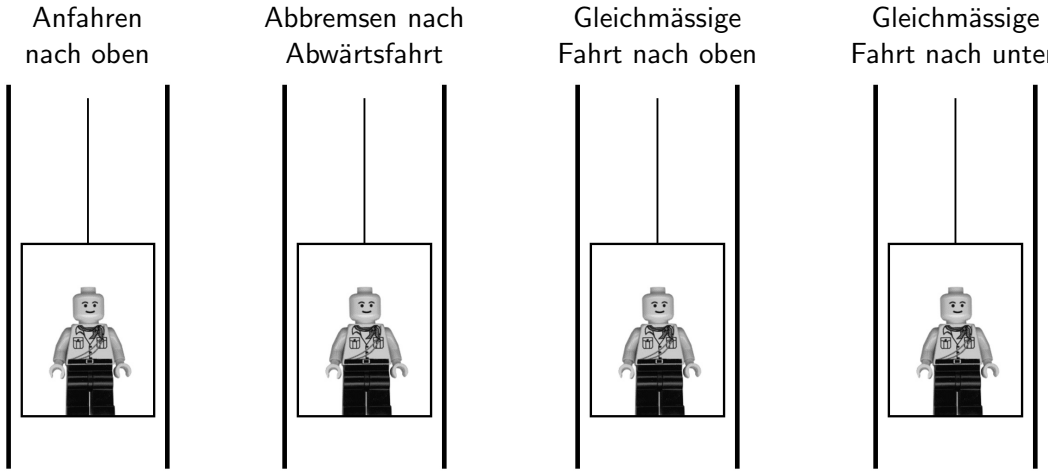
9. *Die Beschleunigung des Bugatti Veyron*

   In der Werbung des **Bugatti EB 16.4 Veyron** (siehe Bild) wird gesagt, der Wagen beschleunige in $7.3\,\mathrm{s}$ auf $2\underline{0}\underline{0}\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.
   Berechne, welche Motorenkraft der Veyron demzufolge auf die Strasse bringt. Gib die Antwort in Kilonewton (kN).
   Hier einige weitere Angaben, die du benötigst:

   - Der Veyron besitzt eine Masse von $1888\,\mathrm{kg}$.
   - μ_{R} zwischen Rädern und Strasse betrage 0.014.
   - Über die Beschleunigung hinweg wirke ein mittlerer Luftwiderstand von $1240\,\mathrm{N}$.

10. *Liftfahren*

    (a) Zeichne jeweils die auf die Person wirkenden Kräfte ein.

    (b) Gib an, in welche Richtung die resultierende Kraft F_{res} zeigt, und sage, wie sie sich aus den eingezeichneten Kräften berechnen lässt.

    (c) Die Fahrtgeschwindigkeit des Liftes betrage $2.6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Zum Beschleunigen und Bremsen benötige er einen Weg von $1.9\,\mathrm{m}$. Um wie viele Prozente fühlt man sich demzufolge in den ersten beiden Situationen leichter resp. schwerer?
    Tipp: Der persönliche Schwereeindruck wird stets durch die Stärke der Normalkraft des Bodens bestimmt, durch den wir getragen werden!

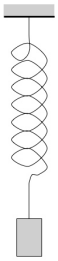
11. *Acht Kräfteskizzen und ihre Gleichungen*

Zeichne jeweils die auf das im Titel **fett** gedruckte Objekt wirkenden Kräfte ein. Stelle danach Gleichungen zwischen den Kräften auf. Dabei beziehst du die resultierende Kraft mit ein, falls vorhanden.

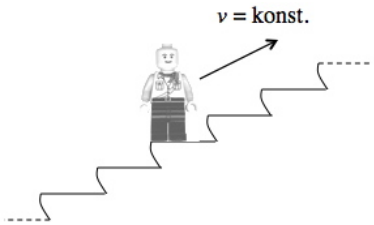
Auto beim Anfahren



Masse am schwingenden Federpendel im untersten Punkt der Bewegung



Person auf der Rolltreppe bei gleichförmiger Aufwärtsfahrt



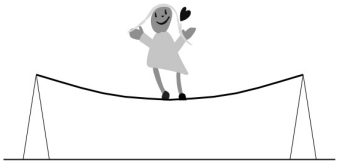
Fallschirmspringer beim gleichförmigen Fallen mit Maximalgeschwindigkeit ($\approx 200\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$)



Parkiertes **Auto**



Trampolinspringerin am untersten Punkt ihrer Bewegung

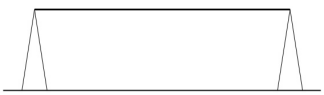


DS Stadt Rapperswil bei gleichförmiger Fahrt



Trampolinspringerin am obersten Punkt ihrer Bewegung





12. *"S'Poschtiwägeli"* **(Zwischenprüfungsaufgabe!)**

In einem Lebensmittelgeschäft bist du mit dem "Poschtiwägeli" unterwegs. Macht es anfangs keine Mühe, den Wagen zu beschleunigen oder abzubremsen, wird es mit der Zeit immer anstrengender.

(a) Erkläre mit den Fachbegriffen der Newton'schen Mechanik, weshalb es immer anstrengender wird, das Gefährt wie gewünscht zu beschleunigen oder abzubremsen.

(b) Nach ein paar Minuten hat das Wägeli samt Inhalt eine Masse von $13.5\,\mathrm{kg}$. Wie stark musst du es anschieben, um eine konstante Geschwindigkeit von $1.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ aufrecht zu erhalten?
Anmerkung: Die Rollreibungszahl zwischen Wägeli und Boden betrage 0.070.



(c) Endlich ist der Einkauf beendet. Du befindest sich auf der Zielgerade und stösst das mittlerweile total $25\,\mathrm{kg}$ umfassende Wägeli mit einer Geschwindigkeit von $2.2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ direkt auf die Kasse zu. Da tritt plötzlich ein älterer Herr in deinen Rollweg und du musst abrupt bremsen.
Mit welcher gegen die Bewegungsrichtung wirkenden Zugkraft musst du das Wägeli bremsen, um es auf nur gerade einem halben Meter Strecke $(0.50\,\mathrm{m})$ zum Stehen zu bringen und somit den Rentner nicht über den Haufen zu fahren?

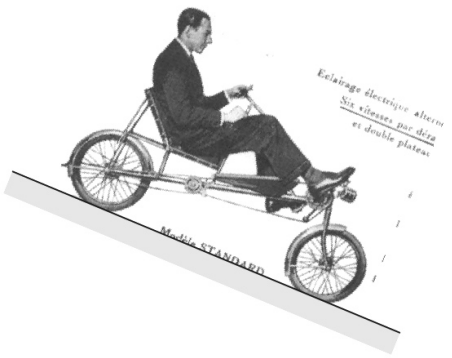
(d) Bist du zur Erzeugung der unter (c) berechneten Zugkraft überhaupt in der Lage, wenn du selber eine Masse von $65\,\mathrm{kg}$ aufweist und die Haftreibungszahl zwischen deinen Schuhen und dem Boden 0.45 beträgt?

13. *Velofahren auf Strassen mit Steigung*

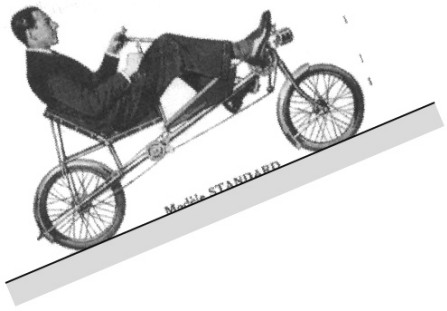
Zeichne in den folgenden Situationen jeweils die Kräfte ein, wobei du die Gewichtskraft in Komponenten zerlegst. Stelle anschliessend die zugehörigen Kraftgleichungen auf.

Hinweis: Beim Abwärtsfahren mit konstanter Geschwindigkeit soll der Radfahrer bremsen müssen. Zeichne hierfür eine zusätzliche Bremskraft F_{B} ein.

Abwärtsfahren mit konstanter Geschwindigkeit



Aufwärts beschleunigen



14. *Ab in den Weltraum – ein Start mit dem Space Shuttle* **(Zwischenprüfungsaufgabe!)**

Beim Start besitzt das **Space Shuttle** (inkl. den beiden seitlich angebrachten **Feststoffraketen** und vollem, grossem **Treibstofftank**) eine Masse von etwa $2041\,\mathrm{t}$! Die Raketen entwickeln zusammen eine nach oben gerichtete Schubkraft mit einem Betrag von $F_{\mathrm{Schub}} = 32\,370\,\mathrm{kN}$!

(a) Zeichne die auf das startende Space Shuttle wirkenden Kräfte ins Bild ein und berechne aus den Angaben oben die Beschleunigung, die das Shuttle zu diesem Zeitpunkt erfährt.
Hinweis: Der Luftwiderstand ist beim Start noch vernachlässigbar klein.



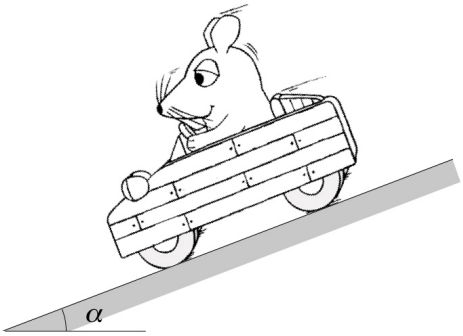
(b) Auf der Homepage der **NASA** findet sich die folgende Angabe:
Das Space Shuttle hat nach 8.0 *Minuten Flugzeit eine Geschwindigkeit von* $7.6\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$ *erreicht.*
Wie gross war die mittlere Beschleunigung des Space Shuttles während diesen 8 Minuten?

(c) Das Resultat von Aufgabe (b) ist wesentlich grösser als jenes aus (a). D.h., das Space Shuttle erhöht seine Beschleunigung nach dem Start noch ganz deutlich. Dafür gibt es mehrere trifftige physikalische Gründe. Welche denn?
Tipp: Überlege dir, was vom Start bis ins Weltall alles für Veränderungen stattfinden.

15. *Die Maus und ihre Seifenkiste*

Die Maus – du kennst sie ganz bestimmt – hat sich eine Seifenkiste gebaut. Damit fährt sie eine Strasse mit Neigungswinkel $\alpha = 7.3°$ hinunter. Die Masse von Seifenkiste und Maus zusammen beträgt $110\,\mathrm{kg}$. Die Rollreibungszahl zwischen Rädern und Strasse ist 0.023. Ausserdem hat die Maus ihr Fahrzeug nicht besonders gut geölt, sodass zusätzlich durch Reibung in der Seifenkiste selber eine der Bewegungsrichtung entgegenwirkende **Widerstandskraft** $F_{\mathrm{W}} = 45\,\mathrm{N}$ entsteht.

(a) Zeichne die Kraftsituation während der Fahrt in die folgende Skizze ein und stelle die Gleichungen zwischen den Kräften auf.
Hinweis: Der Luftwiderstand ist vernachlässigbar! D.h., du zeichnest F_{L} weder in die Kräfteskizze ein, noch verrechnest du diese Kraft in den Gleichungen.



(b) Mit welcher Geschwindigkeit geht die Maus nach insgesamt $99\,\mathrm{m}$ Fahrtstrecke durchs Ziel?

16. *Weitere Aufgaben mit kinematischen Berechnungen*

(a) In welcher Zeit schaffen es zwei Menschen, die einen Smart ($m = 540\,\mathrm{kg}$), mit je einer Kraft von $220\,\mathrm{N}$ anschieben, $10.0\,\mathrm{m}$ weit zu stossen (Rollreibungszahl: $\mu_\mathrm{R} = 0.016$)?

Hinweis: Der Luftwiderstand sei vernachlässigbar.

(b) Um die Gleitreibungszahl zwischen dem Pneu eines Motorrads und dem Asphalt einer Strasse zu bestimmen, wird der Bremsweg bei blockierten Rädern auf horizontaler Strasse gemessen.

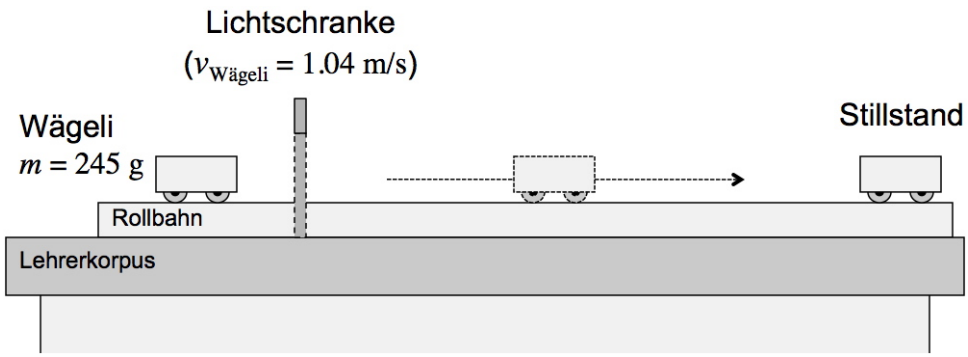
Motorrad und Fahrer besitzen zusammen eine Masse von $155\,\mathrm{kg}$ und haben zu Beginn eine Geschwindigkeit von $37\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Sie kommen nach einer Strecke von $11.5\,\mathrm{m}$ zum Stehen.

Hinweis: Auch hier sei der Luftwiderstand vernachlässigbar.

Tipp zum Vorgehen: Beginne bei dieser Aufgabe mit der Kinematik berechne so die Beschleunigung a (gmbBoA mit Zeitumkehr). Danach lässt sich die F_res angeben. Eine Kräfteskizze wird dir verraten, wie F_res mit den auf das Motorrad wirkenden Kräften zusammenhängt. Damit kannst du schliesslich die Reibungszahl μ_G bestimmen.

17. *Ein Schulzimmerversuch*

Auf der Rollbahn im Schulzimmer steht ein Wägeli ($m = 245\,\mathrm{g}$).



Ich stosse das Wägeli kurz an. Danach rollt es selber weiter. Zuerst durchquert es eine Lichtschranke, wo eine Geschwindigkeit von $1.04\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ gemessen wird. Mit dieser Geschwindigkeit schafft es das Wägeli hinter der Lichtschranke $2.45\,\mathrm{m}$ weit zu rollen, bevor es aufgrund der Rollreibung zum Stillstand kommt. Der Luftwiderstand sei vernachlässigbar.

Wie gross ist demzufolge die Rollreibungszahl des Wägelis auf der Schiene?

Tipp zum Starten: Die Bremsbeschleunigung des Wägelis ergibt sich aus der Kinematik.

18. *Eine vertikale Bewegung – der freie Fall*

Eine Daunenfeder ($m = 0.1\,\mathrm{g}$) und eine Metallkugel ($m = 10\,\mathrm{g}$) befinden sich anfänglich ruhend oben in einem $2.0\,\mathrm{m}$ langen Vakuum-Fallrohr (= senkrecht stehende Röhre, in welcher sich keine Luft mehr befindet).

(a) Wie lange sind die Fallzeiten der beiden Objekte bis zum Boden des Fallrohres?

(b) Welche resultierenden Kräfte wirken während dem Fallen auf die Feder und die Metallkugel? Zeichne die Kräfteskizze der beiden frei fallenden Objekte und gib anschliessend die beiden Antworten in Millinewton.

(c) Im freien Fall gilt offenbar für jeden Gegenstand unabhängig von seiner Masse: $a = g$.
Wie kommt es dazu? Anders gefragt: Wie erklärt die Newton'sche Mechanik, dass die Fallbeschleunigung für alle Objekte dieselbe ist und dem Ortsfaktor g entspricht?

19. *Newton'sche Mechanik beim Skisprunganlauf*

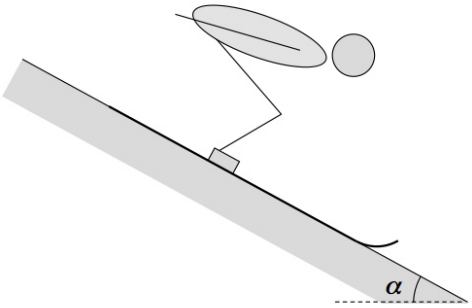
Der **Vikersundbakken** im Norwegischen Vikersund ist die Skiflugschanze, die derzeit die weitesten Skisprünge erlaubt (aktueller Weltrekord: $253.5\,\mathrm{m}$, **Stefan Kraft**, 18.3.2017).

Wir betrachten den Anlauf vor einem Sprung und möchten aus der Kräftesituation die Anfahrtsbeschleunigung im oberen Teil der Anlaufspur bestimmen. Dazu einige Angaben und Annahmen:

- Die Neigung der Anlaufspur beträgt im oberen Teil $72.6\,\%$.
- Als Beispiel dient uns der Österreicher **Gregor Schlierenzauer** (Sieger von Vikersund 2013). Zusammen mit Anzug und Skis betrug seine Masse $71\,\mathrm{kg}$.
- Dank seiner Serviceleute war Schlierenzauer sicher mit sehr gut präparierten Skis unterwegs (Gleitreibungszahl zwischen Spur und Skis: 0.040).
- Bei guter Anfahrtshocke wird der Luftwiderstand minimal. Gehen wir in einem Moment im oberen Teil des Anlaufs von einem Wert von $F_\mathrm{L} = 120\,\mathrm{N}$ aus.

Bestimme nun die Beschleunigung Schlierenzauers im beschriebenen Moment. Verwende die rechts folgende Skizze für das Eintragen der Kräfte.





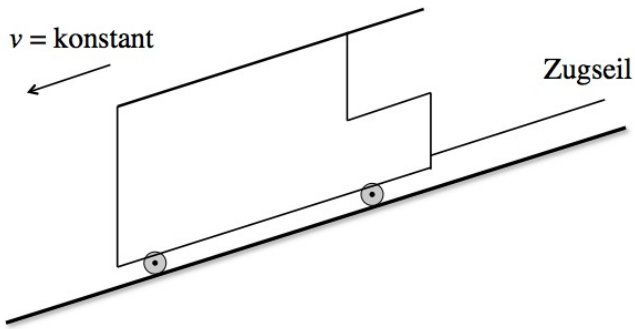
20. *Die Polybahn*

Das **Polybähnli** ist eine Standseilbahn vom Central zur ETH-Terrasse. Die beiden Wagen hängen am selben **Zugseil**, das in der Bergstation über eine Umlenkrolle läuft. Wenn der eine Wagen aufwärts fährt, fährt der andere abwärts. Wir betrachten den **gleichförmig abwärts fahrenden Wagen**.

Zeichne die zugehörige **Kräfteskizze** (Vorlage unten) und berechne die **Zugkraft** F_Z, mit der das Zugseil während dieser Bewegung am Wagen zieht (Resultat in Kilonewton kN).

Weitere Angaben: Masse des Wagens (inkl. Passagiere): $12.4\,\mathrm{t}$
Rollreibungszahl zwischen Rädern und Schienen: 0.011
Aktuelle Steigung der Strecke: $23.2\,\%$



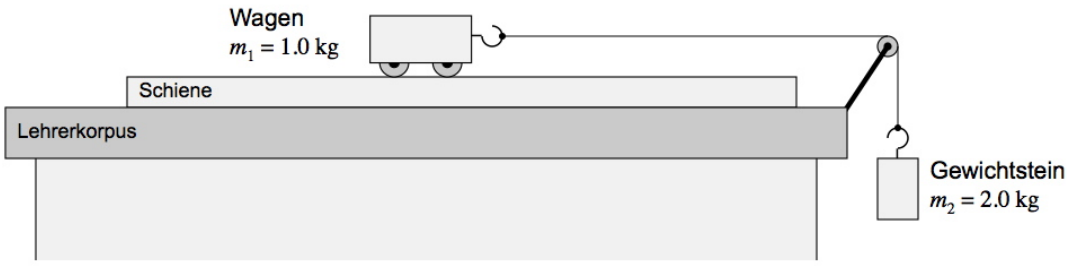


Aufgaben mit gekoppelten Körpern

21. *Gekoppelte Körper I – Die Rollbahn*

In einem Schulexperiment wird ein kleiner Wagen mit einer bestimmten Masse m_1 auf dem Lehrerkorpus beschleunigt. Zur Beschleunigung dient ein hängender Gewichtstein (Masse m_2), der den Wagen via einen über eine Umlenkrolle laufenden Faden zieht. Es ergibt sich eine konstante Antriebskraft, deren Stärke sich zudem durch Veränderung der hängenden Masse m_2 einfach variieren lässt.

Hinweis: Die Reibung der Umlenkrolle und die Masse des Fadens sind in der gesamten Aufgabe zu vernachlässigen.



(a) Martin ist abgelenkt, als der Lehrer erklärt, dass die Analyse dieser Situation etwas komplizierter ist. Daher denkt er, dass die auf den Wagen wirkende Antriebskraft, also die Zugkraft des Fadens, gleich der Gewichtskraft des hängenden Gewichtssteins ist – das tönt zunächst ja eigentlich plausibel: der Faden überträgt die Gewichtskraft des Gewichtsteins auf den Wagen.
Welche Beschleunigung ergäbe sich für den Wagen unter dieser (falschen) Annahme, wenn die Massen $m_1 = 1.0\,\mathrm{kg}$ und $m_2 = 2.0\,\mathrm{kg}$ betragen? (Wagen: $\mu_\mathrm{R} = 0.035$).

(b) Weshalb ist das mit Martins Annahme erhaltene Resultat ganz und gar unsinnig?

(c) **Wie geht's nun richtig?**
Offensichtlich funktioniert Martins Denkweise unter (a) nicht. Er vergisst, dass auch die Masse des Gewichtsteins träge ist und beschleunigt werden muss. Die Gewichtskraft muss beide Körper beschleunigen, nicht nur den Wagen!
Um das Problem korrekt zu analysieren, sollte man die beiden Massen gekoppelt, also quasi als einen einzigen Körper betrachten. Dann lassen sich zwei Fragen beantworten:

- **Welche resultierende Kraft erfährt das gekoppelte System insgesamt?**

  Antwort: Die auf den Gewichtstein wirkende Gewichtskraft treibt an und die Rollreibung des Wagens bremst. Kräfte innerhalb des gekoppelten Systems, hier also die Zugkraft im Faden, sind nicht mehr zu berücksichtigen. Es gilt also für das gekoppelte System: $F_\mathrm{res,total} = F_\mathrm{G,2} - F_\mathrm{R}$.

- **Welche Masse besitzt das gesamte gekoppelte System?**

  Antwort: Welche Masse muss von der resultierenden Kraft $F_\mathrm{res,total}$ insgesamt beschleunigt werden? Es ist die Trägheit dieser gesamten Masse, welche ins 2. Newton'sche Axiom einzufliessen hat! Im betrachteten Fall ist die Antwort sehr einfach: $m_\mathrm{total} = m_1 + m_2$.

Laut Aktionsprinzip ergibt sich somit für die Beschleunigung des gekoppelten Systems:

$$a = \frac{F_\mathrm{res,total}}{m_\mathrm{total}} = \frac{\text{netto auf das gekoppelte System wirkende Kraft}}{\text{Trägheit des gesamten gekoppelten Systems}}$$

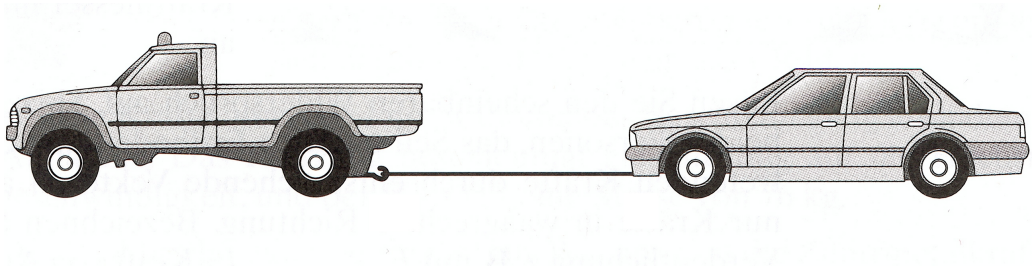
Berechne damit aus den unter (a) gegebenen Werten die korrekte Beschleunigung. Gib das Resultat für die Beschleunigung auch rein formal an ($a = \ldots \cdot g$)!

(d) Bestimme mit dem Resultat von (c) die Zugkraft im Faden, indem du nun wieder nur einen der beiden Gegenstände – Wagen oder Gewichtstein – betrachtest.

(e) **Sehr anspruchsvoll!** Wie gross muss man die Masse des Antriebsklotzes wählen, wenn die unter (c) berechnete Beschleunigung um 25 % verringert werden soll?

22. *Gekoppelte Körper II – Pannenhilfe*

Ein Personenwagen ($m_2 = 1350\,\mathrm{kg}$) muss aufgrund eines Motorschadens vom Pannenhilfefahrzeug ($m_1 = 1950\,\mathrm{kg}$) abgeschleppt werden. Wir betrachten den Beschleunigungsvorgang, bei dem die beiden Autos schlussendlich auf eine Fahrtgeschwindigkeit von $52\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ kommen. Dabei bringt der Allrad-Antrieb des Pannenhilfefahrzeugs eine Motorenkraft von $6130\,\mathrm{N}$ auf die Strasse.



(a) Trage die auf die beiden Fahrzeuge wirkenden Kräfte in die Skizze ein (Luftwiderstand vernachlässigen).

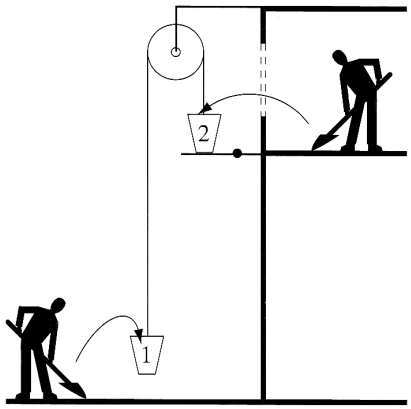
(b) Bestimme die Beschleunigung unter der Voraussetzung, dass die Rollreibungszahl zwischen Pneus und Strasse bei beiden Fahrzeugen 0.070 beträgt.

(c) Wie weit fahren die Autos während dem Beschleunigen?

(d) Berechne die Zugkraft im Abschleppseil beim Beschleunigen.
Tipp: Suche dir eines der beiden Autos aus und bestimme als Zwischenresultat die auf dieses Auto wirkende resultierende Kraft.

23. *Gekoppelte Körper III – Bauarbeiter*

Bei Renovierungsarbeiten muss der abgeschlagene Verputz aus dem obersten Stockwerk nach unten und frischer Mörtel nach oben geschafft werden. Die Arbeiter haben sich dafür zwei Eimer besorgt, die mit einem Seil verbunden sind. Das Seil läuft über eine Rolle. Im Folgenden sind die Massen des Seils und der Rolle, sowie die Reibung der Rolle während der Bewegung zu vernachlässigen.



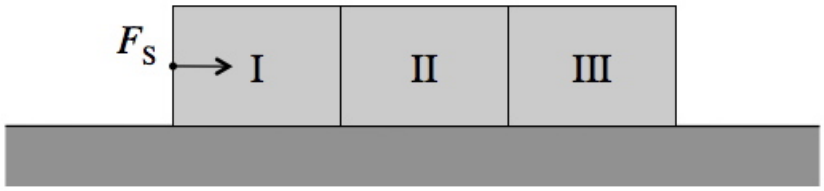
(a) Zunächst steht Eimer 2 mit einer Masse von $14.0\,\mathrm{kg}$ auf einer momentan noch fixierten, also stabilen Klappe. Eimer 1 mit einer Masse von $13.5\,\mathrm{kg}$ hängt in der Luft. Berechne für diesen Fall alle einzelnen Kräfte, welche auf die beiden Eimer wirken.

(b) Die Klappe wird nach unten geöffnet. Wann und mit welcher Geschwindigkeit erreicht Eimer 2 den Boden, wenn die Klappe auf einer Höhe von $5.0\,\mathrm{m}$ lag?

(c) Berechne für die beschleunigte Bewegung ausserdem alle einzelnen Kräfte, welche auf die beiden Eimer wirken.

24. *Kraftübertragung beim Schieben mehrerer Körper*

Drei identische Klötze befinden sich nebeneinander auf horizontaler Unterlage. Die Masse des einzelnen Klotzes betrage $1.00\,\mathrm{kg}$, die Gleitreibungszahl mit der Unterlage sei 0.250. Auf den Klotz ganz links wirke die Schubkraft $F_\mathrm{S} = 10.0\,\mathrm{N}$:



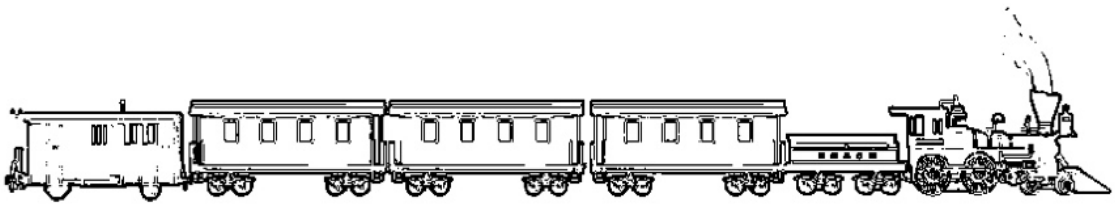
(a) Wirken auf die einzelnen Klötze gleich grosse oder unterschiedliche resultierende Kräfte?

(b) Welche Beschleunigung erfährt das System?

(c) Wie gross ist die Kraft von Klotz I auf Klotz II und wie gross diejenige von Klotz II auf Klotz III?

25. *Kraftübertragung bei Zügen*

Ein Zug, bestehend aus einer Lokomotive und vier angehängten Wagen von je $15.5\,\mathrm{t}$ fährt auf horizontaler, gerader Strecke mit einer Beschleunigung von $0.32\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ an. Die Rollreibungszahl beträgt 0.0050. Wie gross sind die Beträge der Kräfte, die in den einzelnen vier Kupplungen übertragen werden?



Herausforderungen

26. *Schokolade auf dem Förderband*

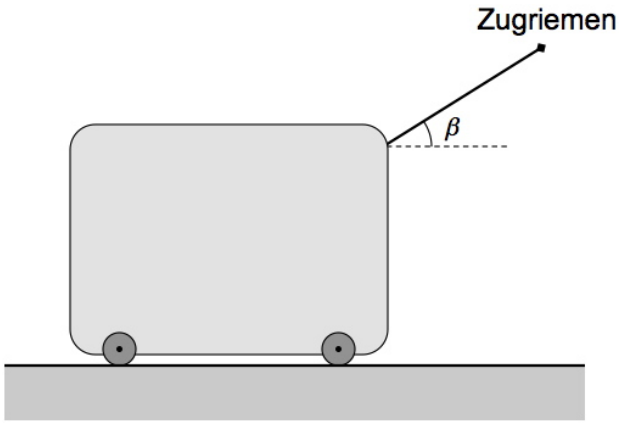
In einer Schokoladenfabrik wird eine Pralinenschachtel innerhalb der Produktionsmaschine auf ein horizontal laufendes Förderband abgesetzt, das sich mit $1.30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ bewegt. Die Reibungszahl zwischen Schachtel und Förderband beträgt 0.33.

(a) Wie lange dauert es, bis die Schachtel auf dem Förderband zu gleiten aufhört?
Tipp: Betrachte den Vorgang zweckmässig im Bezugssystem des Förderbandes. D.h., betrachte das Förderband als ruhend.

(b) Wie lange ist die Gleitstrecke der Schachtel auf dem Förderband?

27. *Der Rollkoffer – oder: Hast du den Durchblick bei Kräftezerlegungen?*

Ein Reisender zieht seinen Rollkoffer mit einer Masse von $12.7\,\mathrm{kg}$ mit einer gleichmässigen Geschwindigkeit hinter sich her. D.h., der in der folgenden Skizze eingezeichnete Zugriemen zieht längs seiner Ausrichtung mit der Zugkraft F_Z am Koffer. Zwischen der Riemenrichtung und der Horizontalen gibt es einen Winkel β von $36°$.



(a) Zeichne alle auf den Koffer wirkenden Kräfte oben in die Skizze ein.

(b) Die Zugkraft F_Z des Riemens steht schief zu allen anderen Kräften. Zerlege sie in eine horizontale Komponente $F_{\mathrm{Z},\parallel}$ und eine vertikale Komponente $F_{\mathrm{Z},\perp}$ und stelle anschliessend Gleichungen zwischen den Beträgen aller Kräfte in horizontaler und in vertikaler Richtung auf.

(c) Fährt man mit dem Rollkoffer in der gezeigten Situation über eine Waage (im Boden), so zeigt diese einen geringeren Betrag an, als wenn der Koffer ungezogen auf der Waage stehen würde. Gib dafür eine Erklärung.

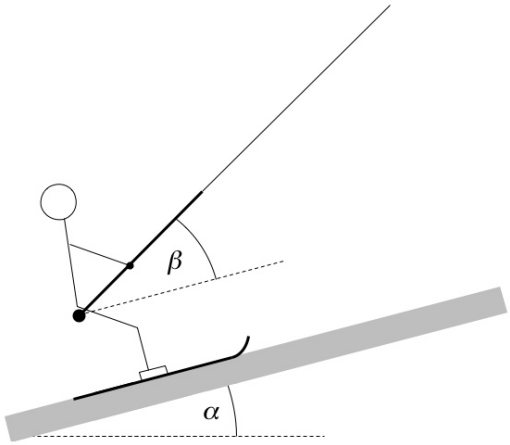
(d) Die Beträge der beiden Zugkraft-Komponenten lassen sich mit den beiden Winkelfunktionen Sinus und Cosinus aus dem Betrag der Zugkraft berechnen. Es gilt:

$$F_{\mathrm{Z},???} = F_\mathrm{Z} \cdot \sin\beta \qquad \text{und} \qquad F_{\mathrm{Z},???} = F_\mathrm{Z} \cdot \cos\beta$$

Finde heraus, welche Gleichung zu welcher Komponente gehört, d.h., wo für die Fragezeichen (???) das Symbol $\parallel$ und wo $\perp$ einzusetzen ist.

(e) Nun muss bei dem angegebenen Winkel von $\beta = 36°$ für eine gleichmässige Fahrt mit einer Zugkraft von $F_\mathrm{Z} = 8.9\,\mathrm{N}$ gezogen werden. Berechne daraus mit allen Ergebnissen aus den vorigen Teilaufgaben die Beträge der Normalkraft und der Reibungskraft, sowie die Rollreibungszahl μ_R zwischen Rollen und Boden.

28. *Auf dem Skilift – die Master-Aufgabe zur Kräftezerlegung*



Auf dem Skilift wird ein Skifahrer an einem Hang mit Neigungswinkel $\alpha = 13°$ hochgezogen. Der Winkel zwischen der Zugrichtung des Seils und dem Hang beträgt $\beta = 23°$. Weiter sind:

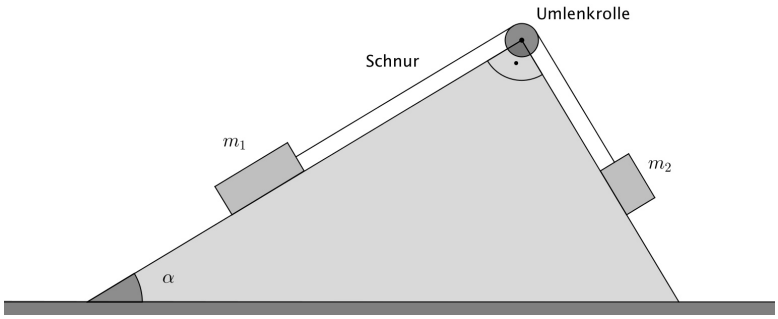
Masse des Skifahrers (inklusive Bügel):	$m = 92\,\mathrm{kg}$
Zugkraft des Seils an Skifahrer (und Bügel):	$F_\mathrm{Z} = 520\,\mathrm{N}$
Gleitreibungszahl zwischen Skis und Schnee:	$\mu_\mathrm{G} = 0.21$

Berechne aus diesen Angaben den Betrag der Normalkraft des Bodens auf den Skifahrer.

Tipp: Zerlege sowohl F_G, als auch F_Z in Komponenten parallel und senkrecht zum Hang.

29. *Gleichgewichtssuche*

Eine erste schiefe Ebene besitze den Neigungswinkel α. Deren Winkel zu einer zweiten schiefen Ebene betrage $90°$. Die beiden über eine Umlenkrolle mit einer Schnur verbundenen Massen m_1 und m_2 lagern reibungsfrei auf den beiden Ebenen. Die Massen von Schnur und Umlenkrolle seien vernachlässigbar klein, ebenso die Reibung der Umlenkrolle:



(a) Es seien $m_1 = 250.0\,\mathrm{g}$, $m_2 = 125.0\,\mathrm{g}$ und $\alpha = 25.0°$.
   i. In welche Richtung und wie schnell beschleunigen die beiden Massen?
   ii. Welche Zugkraft herrscht während der Beschleunigung in der Schnur?

(b) Wie gross müsste der Winkel α sein, damit die beiden Massen aus (a) im Gleichgewicht wären?

(c) Leite eine allgemein gültige Gleichung für den Gleichgewichtswinkel α in Abhängigkeit der Massen m_1 und m_2 her.
Hinweis: Vereinfache dein Resultat mittels folgender trigonometrischer Beziehungen:

$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha \qquad \text{und} \qquad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

(d) In welchem exakten Verhältnis müssen gemäss dem Resultat aus (c) die beiden Massen m_1 und m_2 zueinander stehen, wenn der Neigungswinkel $\alpha = 30°$ beträgt?